

MECHANICKÉ VLASTNOSTI DŘEVA

Ing. Michal Bošanský, Ph.D.¹

¹ Ústav nauky o dřevě a dřevařských technologiích, Lesnická a dřevařská fakulta, Mendelova univerzita v Brně, Zemědělská 1, 613 00 Brno, Česká republika

Dřevo má své nenahraditelné vlastnosti, které ho zařazují mezi materiály se širokým uplatněním v praxi. Mezi tyto vlastnosti patří mimo jiné mechanické vlastnosti, zejména pružnost a pevnost. Stupeň homogenity uspořádání atomů a molekul v objemu dřeva a orientace zejména kovalentních a vodíkových vazeb určuje velikost a orientaci mechanických vlastností na úrovni mikrostruktury a makrostruktury. Různost mechanických vlastností v objemu dřeva a jejich závislost od směru nazýváme anizotropií mechanických vlastností.

Dřevěné konstrukční prvky jsou vhodné zejména pro přenos tahových, tlakových a ohybových namáhání. Dřevo se vzhledem k jeho vysokému poměru pevnosti k hmotnosti často používá jako konstrukční materiál pro střechy a pro lávky pro chodce a cyklisty. Modul pružnosti dřeva je v porovnání s modulem pružnosti oceli nebo betonu nízký. Na druhou stranu má dřevo při relativně malé hmotnosti dobrou pevnost a výhodný vzájemný poměr těchto vlastností činí ze dřeva, z konstrukčního hlediska, jeden z nejvhodnějších materiálů. Rovnoběžně s vlákny, tj. ve směru kmene, je pevnost materiálu zvlášť vysoká, zatímco kolmo k vláknům jsou pevnostní vlastnosti nízké.

Napětí

Napětí ve dřevě představuje míru vnitřních sil, které se v tělese objevují jako odpověď na působení vnějších mechanických sil. Napětí (σ) definujeme jako velikost vnitřní síly, která je vztažena na jednotku plochy tělesa podle vztahu

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ (Pa)}$$

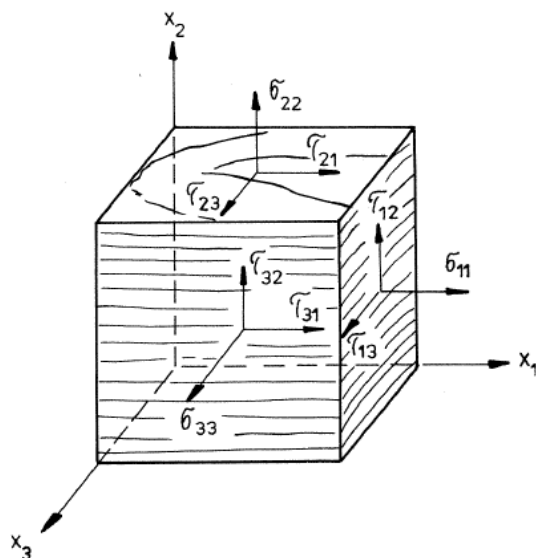
Jestliže síly působí kolmo na průřezovou plochu tělesa, jedná se o normálové napětí (σ), například napětí v tahu nebo tlaku. Působí-li síly v rovině průřezu, vzniká tangenciální (smykové) napětí (τ), například napětí ve smyku. Kombinaci normálového a tangenciálního napětí představuje ohyb.

Každý systém napjatosti v libovolném bodě prostoru je možné zobrazit pravoúhlým elementem jakým může být například jednoduchá kostka, a to tak aby její hrany byly rovnoběžné se zvoleným souřadnicovým systémem – karteziánský souřadnice x , y , z .

Dřevo, ale i další materiály a kompozity které jsou tvořeny vlákny, se nejčastěji potýkají se stavy napjatosti nejméně ve dvou směrech – podél vláken a napříč vláken. Tyto směry vláken ale nemusí nutně odpovídat samotnému založení orientace karteziánské souřadné soustavy.

Vektory napětí mohou být na každé ploše rozloženy do tří složek. Při označování napětí první index značí plochu, na kterou napětí účinkuje, a druhý index označuje směr složky napětí. Devět složek napětí je dostatečných na specifikování kompletního stavu napětí elementární kostky. Uvažujeme s podmínkou rovnováhy

$$\sigma_{11} = -\sigma_{11}; \quad \sigma_{22} = -\sigma_{22}; \quad \sigma_{33} = -\sigma_{33}; \quad \tau_{21} = -\tau_{12}; \quad \tau_{31} = -\tau_{13}; \quad \tau_{32} = -\tau_{23}$$



Obr. 171: Složky napětí na kostce dřeva v pravoúhlém systému

Normálové napětí působící na opačných plochách jsou vždy stejné, na základě toho můžeme napsat rovnici

$$\sigma_{ii} = \sigma'_{ii}$$

Takto dostáváme devět složek napětí $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{21}, \tau_{31}, \tau_{23}, \tau_{32}$.

Složky σ_{11}, σ_{22} a σ_{33} představují normálové napětí. Ostatní složky působí na plochu tangenciálně a jsou označeny jako smykové napětí. Stav napětí v bodě můžeme vyjádřit pomocí maticového zápisu:

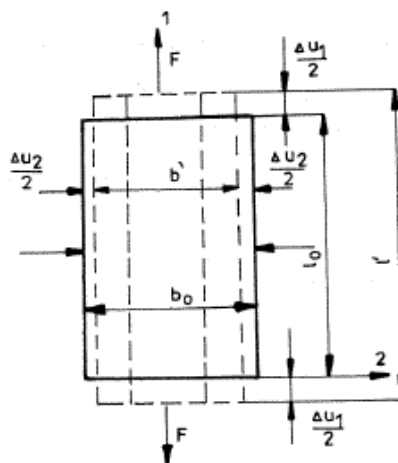
$$\sigma = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{\Delta F_1}{\Delta S_1} & \frac{\Delta F_2}{\Delta S_1} & \frac{\Delta F_3}{\Delta S_1} \\ \frac{\Delta F_1}{\Delta S_2} & \frac{\Delta F_2}{\Delta S_2} & \frac{\Delta F_3}{\Delta S_2} \\ \frac{\Delta F_1}{\Delta S_3} & \frac{\Delta F_2}{\Delta S_3} & \frac{\Delta F_3}{\Delta S_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Deformace

Působením mechanických sil dochází ke změně tvarů a rozměrů dřeva, což nazýváme deformací. Kromě jednoduchého prodloužení nebo zkrácení se pravoúhlý průřez dřeva může zkroutit do kosodélníkového tvaru. Prodloužení a zkrácení rozměrů jsou charakteristická pro normálová napětí a nazýváme je normálovými deformacemi ϵ . Kroucení tělesa vzniká při tangenciálních napětí a nazýváme jej smykovou (tangenciální) deformací γ .

Deformace můžeme rozdělit na pružné deformace, deformace pružné v čase a na plastické deformace. Pružná deformace je návratná změna dřeva po odstranění působení vnějších sil. Když je dřevo namáhané napětím, které vyvolává jen pružné deformace, nachází se ve stavu napjatosti v pružné oblasti. Pružná deformace v čas je návratná změna tvarů dřeva po uvolnění vnějších sil, které nenastává okamžitě, ale za určitý čas. Trvalá deformace je nenávratná změna tvaru dřeva, která po odstranění působení vnějších mechanických sil zůstává (nemizí) a těleso dostává nový tvar a rozměry.

Působícímu napětí těleso odporuje příslušnou změnou svého tvaru, tedy se deformuje. Mezi působícím napětím a vnitřním odporem materiálu proti deformaci vzniká rovnováha.



Obr. 172: Změna tvaru tělesa při tahu

Vlivem působení vnější síly se prodlouží a šířka tělesa se zúží o absolutní deformace a deformace Δu_1 a Δu_2 .

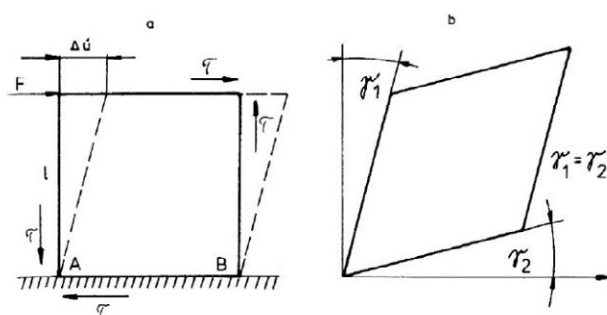
Poměrná pružná deformace ve směru působící síly se vypočítá

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta u_1}{l_0}$$

a poměrné příčné zkrácení

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta u_2}{b_0}$$

V tělese také mimo deformace vzniklé normálovým napětím, vznikají deformace smykové γ . Smyková deformace vzniká posunutím dvou sousedních přířezů, ve kterých působí napětí. Při tangenciálním napětí se mění pravoúhlost hran, což je zásadní rozdíl mezi deformací vzniklou normálovým a tangenciálním napětím.



Obr. 173: Deformace tělesa navozené smykovým napětím

Pravý úhel základny tělesa se změní o hodnotu

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

a to proto, že těleso musí být po uvolnění sil v rovnováze.

Při tangenciálním napětí se mění pravoúhlost stran. V tom je hlavní rozdíl mezi deformacemi smykovými a deformacemi normálovými.

Prostorová deformacemi označujeme deformace v rámci prostoru pravoúhlého souřadného systému. Poměrná deformace ε_{11} ve směru osy x se potom definuje jako limita podílu

$$\varepsilon_{11} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$$

Když budeme počítat s ortogonálním systémem, můžeme všeobecně vyjádřit všechny tři směry ve tvaru

$$\varepsilon_{ij} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i}$$

Poměrnou smykovou deformaci ve všeobecném tvaru definujeme jako

$$\gamma_{ij} = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta x_j \rightarrow 0}} \left(\frac{\Delta u_i}{\Delta x_j} + \frac{\Delta u_j}{\Delta x_i} \right)$$

Stav deformace v bodě můžeme vyjádřit pomocí maticového zápisu

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x_3} + \frac{\Delta u_3}{\Delta x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} + \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} \right) & \frac{\Delta u_2}{\Delta x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_2}{\Delta x_3} + \frac{\Delta u_3}{\Delta x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_3}{\Delta x_1} + \frac{\Delta u_1}{\Delta x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_3}{\Delta x_2} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x_3} \right) & \frac{\Delta u_3}{\Delta x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Pružnost

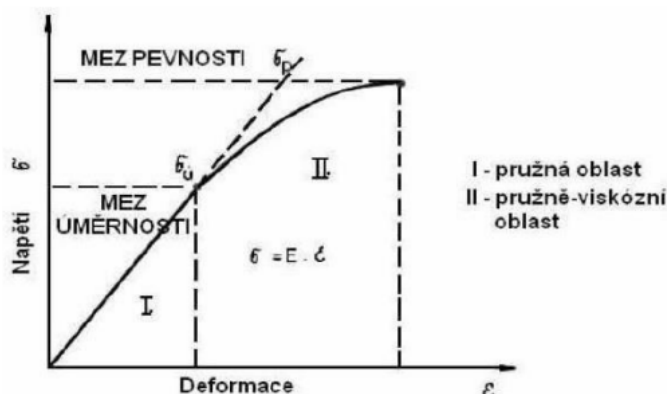
Pružnost dřeva se všeobecně definuje jako schopnost dosáhnout původní tvar (rozměry) po uvolnění vnějších sil. Vycházejíc z dígramu napětí-deformace můžeme pružnost kvantifikovat těmito charakteristikami:

- Modul pružnosti (E),
- Poissonovými čísly (μ),
- mezí úměrnosti (σ_u),
- energií pružné deformace.

Modul pružnosti

Modul pružnosti vyjadřuje vnitřní odpor materiálu proti pružné deformaci. Čím je modul pružnosti větší, tím větší napětí je potřebné na vyvolání deformace. Rozlišujeme moduly pružnosti E při normálovém namáhání (tah, tlak, ohyb) a moduly G při tangenciálním namáhání (krut, smyk).

Diagram napětí-deformace můžeme rozdělit na dvě části, a to na lineární část po mez úměrnosti σ_u a nelineární část nad mezí úměrnosti po mez pevnosti σ_p . Mez úměrnosti je definována jako takové napětí, do kterého v tělese vznikají pouze deformace pružné, případně pružné v čase, a napětí je v tělese rovnoměrně rozděleno. Po ukončení silového působení tyto deformace zcela zanikají a těleso se vrací do původního stavu.



Obr. 174: Diagram napětí-deformace

Z průběhů diagramu napětí-deformace vyplývá, že po mez úměrnosti jsou vztahy lineární a příslušná rovnice přímky má tvar $y = k \times x$. Pokud tento vztah převedeme na souřadnice deformace a napětí, tak rovnice přímky má tvar Hookova zákona a směrnice přímky svůj fyzikální význam. Je to vlastně modul pružnosti materiálu, v našem případě modul pružnosti dřeva E . Všeobecně můžeme napsat:

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

Poissonovo číslo

Poissonova čísla jsou důležitými charakteristikami pružnosti dřeva a využívají se především při objemových změnách dřeva způsobených vlivem mechanického zatížení. Pokud hranol dřeva namáháme tlakem nebo tahem, vznikají v něm kromě deformací ve směru působení síly (zkrácení a prodloužení), také deformace kolmé na směr síly. Nazýváme je příčnými deformacemi (neměli by se zaměňovat s deformacemi kolmo na vlákna. Poissonovo číslo vyjadřuje poměr příčné deformace k podélné deformaci.

Poměr obou deformací je Poissonovo číslo

$$\mu = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Mez úměrnosti

Pokud napětí dřeva překročí mez úměrnosti, lineární úsek diagramu se odklání a pozvolně přechází do nelineárního průběhu (viz obr. 173). Napětí, které odpovídá bodu odklonu od lineární části, nazýváme mezí úměrnosti σ_v . Tuto hranici možno definovat jako nejvyšší napětí ve dřevě, při kterém ještě nevznikají plastické deformace a deformace pružné v čase.

Hookeův zákon

Na základě zákonitosti, že při jednoosém namáhání se dřevo chová po mez úměrnosti jako lineárně pružný materiál, předpokládáme, že je mezi ostatními složkami napětí a deformací lineární vztah a mají tvar Hookeova zákona.

Obecný ortotropní materiál

Hookeův zákon obecného ortotropního materiálu v hlavním ortotropním souřadnicovém systému odvodíme z Hookeova zákona obecného anizotropního materiálu s uvažováním charakteristiky hlavních ortotropních os.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

S uvážením symetrie obsahuje matice tuhosti $[C]$ u obecného ortotropního materiálu celkem 9 nezávislých materiálových konstant.

Obdobně úpravou Hookeova zákona v inverzním tvaru pro obecný anizotropní materiál obdržíme Hookeův zákon obecného ortotropního materiálu.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Rovněž matice poddajnosti obecného ortotropního materiálu obsahuje 9 nezávislých materiálových konstant.

Jednotlivé prvky matice poddajnosti S_{ij} je možné rovněž stanovit pomocí fyzikálních charakteristik, které mají jasný fyzikální či geometrický význam. Do této skupiny patří modul pružnosti E , modul pružnosti ve smyku G a Poissonovo číslo μ . V případě ortotropního materiálu mají tyto veličiny navíc směrové indexy v souladu s hlavním ortotropním souřadnicovým systémem 1, 2 a 3. Fyzikální charakteristiky jsou pochopitelně v různých ortotropních směrech různé.

Pro poměrné přetvoření a zkosení v hlavních ortotropních směrech dostáváme

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{21} * \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{31} * \frac{\sigma_3}{E_3} \\ \varepsilon_2 &= -\mu_{21} * \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{32} * \frac{\sigma_3}{E_3} \\ \varepsilon_3 &= -\mu_{13} * \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{23} * \frac{\sigma_2}{E_2} + \frac{\sigma_3}{E_3} \\ \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}}; \gamma_{31} = \frac{\tau_{31}}{G_{31}}; \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \end{aligned}$$

Předchozí složkové rovnice napíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

A následně symbolicky

$$\begin{aligned} [\sigma] &= [C] * [\varepsilon] \\ [\varepsilon] &= [S] * [\sigma] \end{aligned}$$

Matice obsahuje celkem 12 technických materiálových parametrů. Z podmínek symetrie pro matici materiálové poddajnosti $[S]$ vyplývá velice důležitá vazba mezi technickými materiálovými parametry zapsané obecně

$$\frac{\mu_{ij}}{E_i} = \frac{\mu_{ji}}{E_j}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

Porovnáním matic můžeme vyjádřit jednotlivé prvky matice poddajnosti pomocí technických materiálových charakteristik.

Rovinný ortotropní materiál

Zvláštním případem prostorového ortotropního materiálu je rovinný ortotropní materiál, který se používá jako výpočtový model tenké vrstvy kompozitu-laminy. Předpokládáme, že element leží v hlavní souřadnicové rovině 1, 2 a v ní je také zatěžován. Jde tedy o rovinnou napjatost a následující napětí jsou nulová

$$\sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{32} = 0$$

V tomto případě se maticová relace platící pro obecný prostorový ortotropní materiál zredukuje následovně

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti [C] rovinného ortotropního materiálu tedy obsahuje čtyři nezávislé materiálové konstanty. Inverzní tvar Hookeova zákona vypadá následovně

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Rovněž matice poddajnosti má ve sledovaném případě 4 nezávislé prvky.

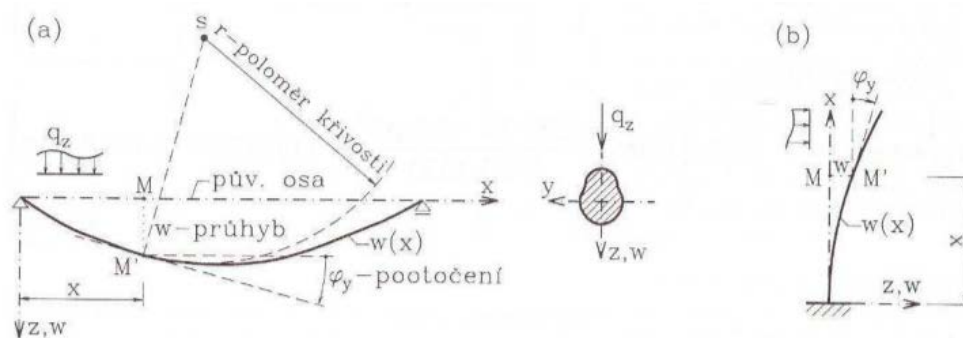
Pokud použijeme inženýrských materiálových konstant, potom má inverzní Hookeův zákon pro rovinný případ následující tvar

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

opět se čtyřmi nezávislými inženýrskými materiálovými konstantami.

Diferenciální rovnice ohybové čáry

Je-li nosník (prut) dostatečně štíhlý, je jeho deformační stav určen tvarem ohybové čáry, tj. křivky, v níž přejde původně přímá osa nosníku vlivem zatížení. Omezíme se na rovinný případ, kdy zatížení i podepření je symetrické ke svislé rovině xz, přičemž osa z je hlavní osou setrvačnosti průřezu. Na obr. 175 je vyznačena ohybová čára $w(x)$, jejíž jednotlivé pořadnice označujeme jako průhyb nosníku v daném místě; kladný je průhyb, směřuje-li dolů.



Obr. 175: Ohybová čára nosníku (Šmirák, 2000)

Pootočení $\varphi = \varphi_y$, tj. úhel, který svírá tečna k ohybové čáře s osu x , budeme pokládat za kladné po směru chodu hodinových ručiček. V teorii malých deformací je $\varphi \ll 1$, takže platí

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{dw}{dx}$$

Z matematiky je znám výraz pro křivost rovinné čáry

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2w}{dx^2}$$

Zanedbáme-li vliv smyku na tvar ohybové čáry, tedy přisoudíme-li deformační účinky jen ohybovým momentům, pak vyjde po úpravě následující vztah

$$M = EI \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$M = D * \kappa$$

což je diferenciální rovnice ohybové čáry 2. řádu. Druhá derivace ohybové čáry je tedy přímo úměrná ohybovému momentu M v daném místě a nepřímo úměrná ohybové tuhosti EI (E – modul pružnosti, I – moment setrvačnosti)

Je-li ohybová tuhost nosníku konstantní ($EI = \text{konst.}$), pak dvojnásobným derivováním a využitím Schwedlerových vět obdržíme

$$q = EI \frac{d^4w}{dx^4}$$

což představuje diferenciální rovnici 4. řádu: čtvrtá derivace průhybu je tedy úměrná příčnému spojitému zatížení

Označení a kladný smysl	Veličina	Diferenciální závislost	
		obecný případ	pro $EI = \text{konst.}$
	průhyb	w	
	pootočení	$\varphi = w'$	
	ohybový moment	$M = -EIw''$	
	posouv. síla	$V = -(EIw''')'$	$V = -EIw''''$
	příčné zatížení	$q = (EIw''')''$	$q = EIw^{IV}$

Tab. 23: Přehled diferenciálních závislostí (čárkami nad w je označena derivace průhybu

Ohyb desky

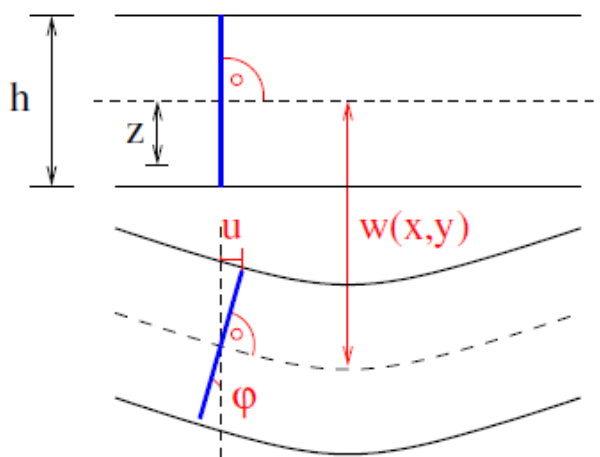
V technické praxi se často vyskytují plošné konstrukce, které jsou převážně zatěžovány ohybovými účinky (podobně jako ohýbané nosníky). Jsou jimi například stropní desky a panely nebo mostovky. Jako desky počítáme plošné konstrukce, které jsou zatíženy a podepřeny výhradně kolmo ke svojí střednicové rovině.

U desek je jeden rozměr (tloušťka) podstatně (5 a více krát) menší než rozměry ostatní. Je-li tloušťka 10 a více krát menší, pak desky označujeme jako tenké a můžeme k jejich analýze použít Kirchhoffovy teorie pro tenké desky, v opačném případě desky označujeme jako tlusté a měli bychom použít výstižnější Mindlinovy teorie.

Kirchhoffova teorie ohybu tenkých desek

Předpoklady Kirchhoffovy teorie je možné shrnout do několika bodů:

- Jednotlivé vrstvy desky na sebe netlačí,
- Normálová napětí ve střednicové vrstvě jsou nulová,
- Body ve střednicové rovině se mohou přemísťovat pouze ve směru osy z ,
- Normály střednicové roviny zůstávají i po deformaci přímé a kolmé k této rovině.



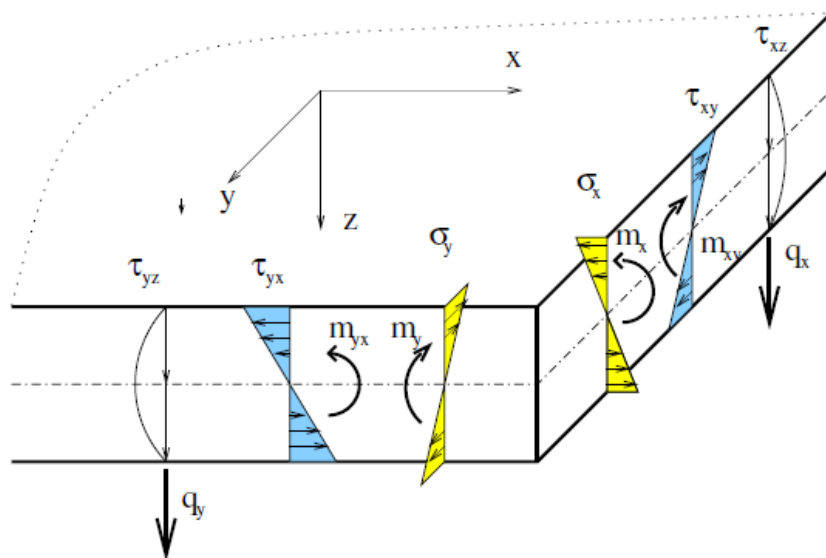
Obr. 176: Deska-předpoklad o normálách

Předpoklad o kolmosti normál je ilustrován na obr. 176. Tento předpoklad stejně jako u ohýbaných nosníků způsobuje lineární změnu normálových poměrných deformací ε a normálových napětí σ po tloušťce desky. Tedy prodloužení u (ve druhém směru pak v) lineárně roste se zvětšující se vzdáleností z od střednicové roviny.

Neznámé veličiny na desce

Jak vyplývá z předpokladů Kirchhoffovy teorie, body ve střednicové rovině se mohou pohybovat jen ve svislém směru w (tedy směru kolmém k nezdeformované střednicové ploše). Obdobně jako na nosnících můžeme pracovat s pootočeními φ zdeformované střednicové plochy:

$$\varphi_x = \frac{dw}{dx}$$
$$\varphi_y = \frac{dw}{dy}$$



Obr. 177: Napětí a vnitřní síly na desce (Brožovský, 2012)

Ve střednicové ploše desky je nenulové pouze posunutí w ve směru osy z systému souřadnic. Jak je ovšem vidět na obr. 177, mimo střednicovou plochu jsou zbývající dvě (vodorovná) posunutí u a v obecně nenulová. Budeme-li předpokládat, že přibližně platí $\tan(\varphi) = \varphi$, pak můžeme v souladu s obr. 177 psát:

$$u = -z\kappa_x = -z \frac{dw}{dx}$$

$$v = -z\kappa_y = -z \frac{dw}{dy}$$

K získání výrazu pro poměrné deformace využijeme geometricko-deformačních vztahů teorie pružnosti a dosadíme do nich za u a v výrazy podle rovnice:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = -z \frac{d^2w}{dy^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = -2z \frac{d^2w}{dx * dy}$$

které můžeme zjednodušit do tvaru

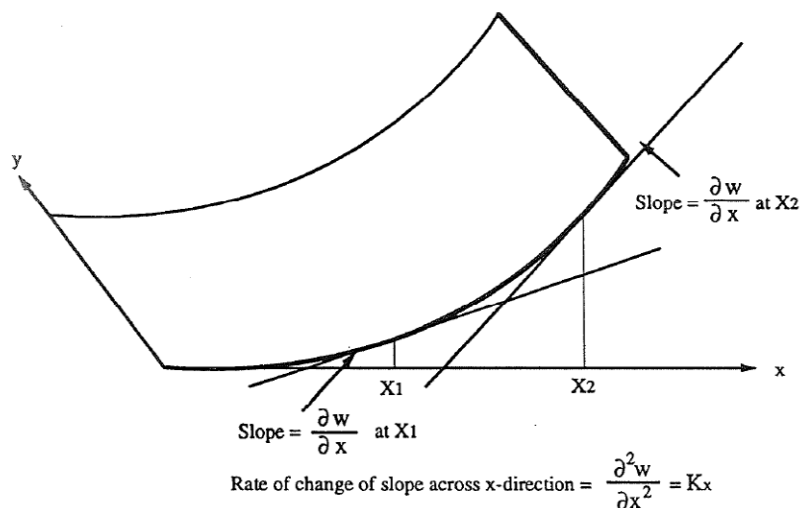
$$\varepsilon = Z * \kappa$$

kde

$$\kappa_x = \frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\kappa_y = \frac{d^2w}{dy^2}$$

$$\kappa_{xy} = 2 \frac{d^2w}{dx*dy}$$



Obr. 178: Zakřivení desky po ose x

Díky tomuto můžeme napsat vztah pro celkovou deformaci

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa.$$

Stále budeme uvažovat materiál pro který platí Hookeův zákon. Můžeme tedy vyjít ze základních vztahů platných pro pružné těleso a do nich dosadit výraz pro celkovou deformaci

$$\delta = C\varepsilon_0 + C\kappa.$$

Okrajové podmínky

Jestliže vnější zatížení konstrukce není v rovnováze, způsobí její pohyb, kterému bráníme podepřením, respektive uložením konstrukce. Pohyb hmotného objektu může být posuvný (translační) nebo otáčivý (rotační) a počet možností pohybu udávají tzv. stupně volnosti. Tuhé těleso má v prostoru 6 stupňů volnosti, tj. má možnost celkem šesti pohybů: tři pohybů translačních ve směru souřadnicových os x , y a z a tři pohybů rotačních kolem těchto os. Volnost pohybu hmotného objektu omezují nebo znemožňují tzv. vazby, tzn. že ruší nebo odebírají stupně volnosti objektu.

Vazeb může být obecně v prostoru větší počet, pro potřeby této podkladu budou stačit následující:

- Volná deska

- umožňuje veškeré průhyby po ose x i y

$$\iint w \, dx \, dy = 0.$$

- Podepřená deska (podepřený okraj desky)

- znemožňuje průhyb

$$w = 0.$$

- může se otáčet, nemůže se ovšem kroutit

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 w}{dy^2} = 0.$$

- Vetknutá deska

- vetknutí znemožňuje průhyb $w = 0$

$$w = 0.$$

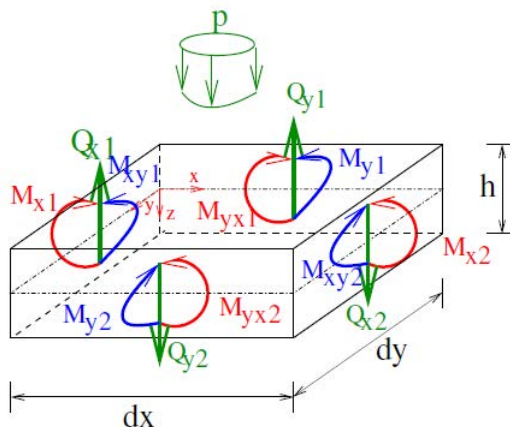
- nemůže se otáčet $dw/dx = dw/dy = 0$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} = 0.$$

Desková rovnice

Deskovou rovnici je možné získat z podmínek rovnováhy na diferenciálním elementu desky, přičemž musíme mít stále na paměti, že dále uvedený výsledek bude platný jen pro desku z izotropního a lineárně pružného materiálu.

$$\begin{aligned} x: \frac{dM_x}{dx} + \frac{dM_{xy}}{dy} &= V_{xy} \\ y: \frac{dM_{xy}}{dx} + \frac{dM_y}{dy} &= V_{yz} \end{aligned}$$



Obr. 179: Vnitřní síly na elementu desky

Díky znalosti podoby vztahu pro distribuci spojitého zatížení můžeme napsat vztah

$$\frac{dV_{xz}}{dx} + \frac{dV_{yz}}{dy} = q.$$

Díky znalosti podoby diferenciální rovnici 4. řádu derivace průhybu můžeme napsat konečnou podobu deskové rovnice

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 2 \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{q}{D}.$$

Pokud bychom chtěli tuto deskovou rovnici rozepsat pro obecně ortotropní materiál, museli bychom využít koeficienty ohybové tuhosti. Výsledná rovnice desky by vypadala následovně:

$$D_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} + 2(D_{11} + 2D_{66}) \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + 4D_{16} \frac{d^4 w}{dx^3 dy} + 4D_{26} \frac{d^4 w}{dx dy^3} + D_{22} \frac{d^4 w}{dy^4} = q.$$

Laminární teorie

Použitím klasické laminační teorie lze odvodit tuhost výsledného kompozitního laminátu z jeho jednotlivých vrstev. Klasická laminační teorie je založena na Love-Kirchhoffově teorii “tenké skořápky” (rovné přímky, kolmé ke středové vrstvě zůstávají po deformaci rovnými, jsou stále ke středové vrstvě kolmé; tloušťka desky se při deformaci nemění).

Předpoklady klasické laminátové teorie jsou:

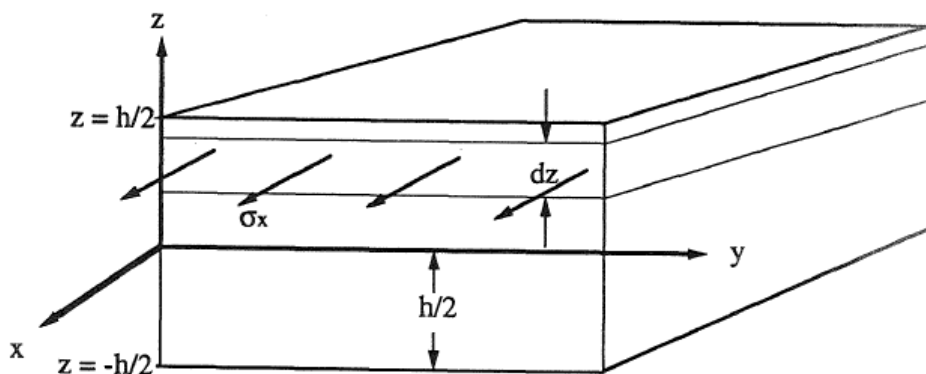
- Deska je složena z libovolného počtu vrstev ortotropních plátů slepených dohromady (ortotropní osy vrstev nemusí souhlasit s osami x, y desky)
- Deska je tenká-tloušťka h je mnohem menší než ostatní rozměry
- Posunutí u, v, w jsou malá ve vztahu k tloušťce desky

- Vlastnosti desky jsou definovány referenční rovinou, KLT je tedy použitelná především na symetrické lamináty
- Napětí v ploše σ_x , σ_y a σ_{xy} , jsou malá vzhledem k celku
- Příčná smyková napětí σ_{xx} a σ_{yz} jsou zanedbatelná
- Tangenciální posunutí u a v jsou lineárními funkcemi osy z
- Příčné normálové napětí σ_z je zanedbatelné
- Pro každou vrstvu platí Hookeův zákon
- Deska má konstantní tloušťku

Aplikace matematické teorie pružnosti na laminátové konstrukce vyžaduje definování konstantní materiálových charakteristik (C_{ij}) pro každou vrstvu k laminátu.

Definice napětí a momentu

Protože napětí v každé vrstvě se mění v závislosti na tloušťce laminátu, bude pohodlné definovat napětí pomocí ekvivalentních sil působících na střední plochu. Na obr. 180 je vidět, že napětí působící na hranu lze rozdělit na přírůstky a sečíst. Výsledný integrál je definován jako výslednice napětí a je značena jako N_i , kde dolní index označuje směr.



Obr. 180: Definice výslednice napětí (Nettles, 1994)

$$\text{celková síla ve směru } x = \sum \sigma_x(dz)(y)$$

$$\text{kde } dz \rightarrow 0, \sum \sigma_x(dz)(y) = y \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

$$N_x \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

Dle obr. 180 lze také zapsat rovnici 2.1.71 ve směru y . Výslednice můžeme zapsat následovně:

$$\begin{aligned} N_x \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ N_y \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ N_{xy} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \end{aligned}$$

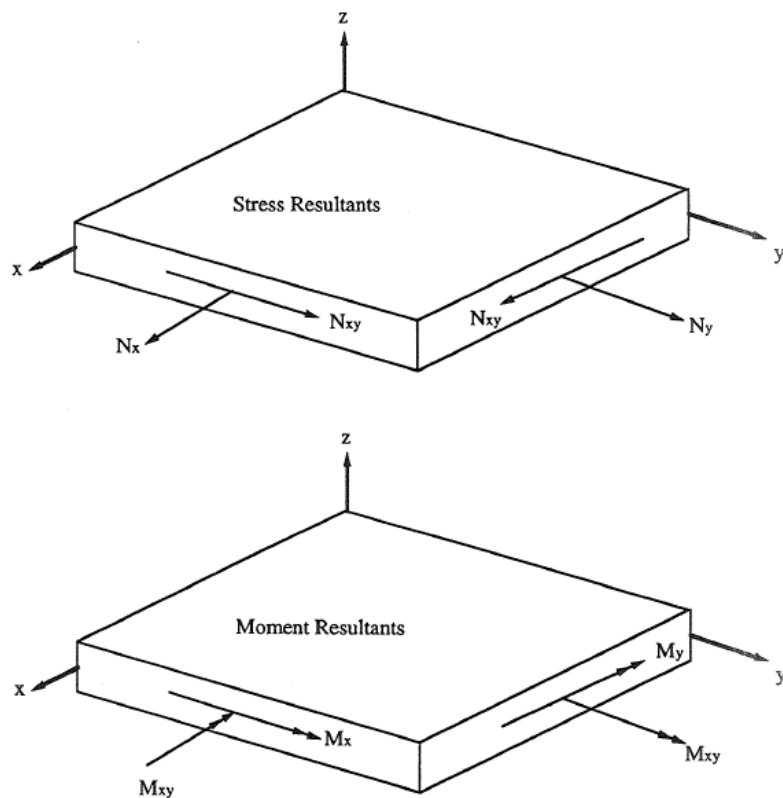
Jak je patrné z obr. 180, napětí působící na hranu vytváří moment kolem střední roviny. Momentové rameno je ve vzdálenosti z od střednicové plochy. Stejným postupem jako u výslednic napětí lze definovat momentové výslednice, která budou následující:

$$M_x \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz$$

$$M_{xy} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz$$

Směry všech výslednic napětí a momentů jsou znázorněny na obr. 181. Šipka se dvěma hlavami označuje točivý moment. Za povšimnutí stojí skutečnost, že momenty M_x a M_y způsobí, že se deska ohne a moment M_{xy} způsobí, že se deska zkroutí.



Obr. 181: Výslednice napětí a momentů

Konstitutivní rovnice pro laminát

Pokud rovnice převedeme do maticového tvaru získáme následující matici:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz$$

a pokud rovnice převedeme do maticového tvaru získáme následující matici:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz$$

Integrály v rovnicích musí být provedeny přes každou vrstvu a poté sečteny, protože na rozhraních vrstev může dojít k diskontinuitě napětí. Při použití obr. 182 se rovnice zapíší následovně:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz$$

V tuto chvíli je možné rovnici dosadit do rovnice, do které následně vložíme rovnice

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz \right. \\ \left. + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} z dz \right\}$$

a

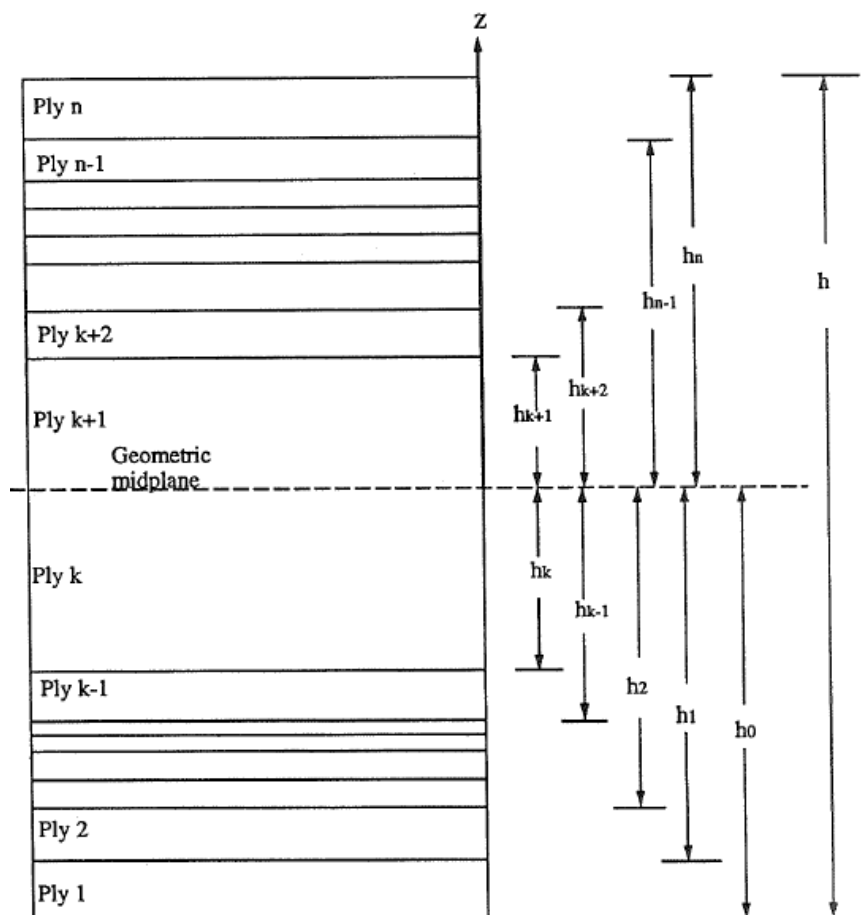
$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} z dz \right. \\ \left. + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right\}$$

Provedením jednoduché integrace získáme následující tvary:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} (h_k - h_{k-1}) \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right\}$$

a

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \right\}$$



Obr. 182: Průřez laminátu

Kontakty

Ing. Michal Bošanský, Ph.D.: michal.bosansky@mendelu.cz