Fourierovy řady s podporou systému počítačové algebry wxMaxima

Aleš Kozubík

Abstrakt: V příspěvku je prezentována pokročilejší ukázka použití systému počítačové algebry `wxmaxima` při podpoře výuky matematické analýzu. Nejprve se stručně charakterizuje rozvoj funkce do Fourierovy řady, řady sinů a řady kosinů. tento postup je následně implementován v podobě skriptu prostředí `wxmaxima`. V závěru se koncentrujeme na pokročilejší ukázku s nalezením funkčního předpisu zadaného vzorku a jeho rozvinutí do periodického pokračování.

Abstract: This paper presents a more advanced demonstration of the use of the computer algebra system `wxmaxima` in supporting the teaching of mathematical analysis. First, the development of a function into the Fourier series, the series of sines, and the series of cosines is briefly characterized. Consequently, this procedure is implemented as a script in the `wxmaxima` environment. Finally, we concentrate on a more advanced demonstration of finding the functional prescription of a given sample and developing it into a periodic continuation.

1 Úvod

Fourierovy řady se používají se zejména při studiu jevů s periodickým charakterem. Tato metoda byla původně vyvinuta pro hledání periodických řešení diferenciálních rovnic. Dnes však nacházejí daleko širší uplatnění. rozklad na vlny se přirozeně objevuje například při ukládání zvuku do audio souborů, při kompresi hudby, kde tvoří základ formátu `mp3`. rovněž lze zmínit kompresi a filtrování obrazů a v neposlední řadě počítačové zpracování signálů.

Proto nikoho nepřekvapí, že problematika rozvoje funkcí do Fourierovy řady se stala organickou součástí kurzu matematické analýzy pro technické obory, informatiku nevyjímaje. Jak uvidíme v dalším textu, svojí povahou jsou vhodné pro řešení s využitím počítačů. koeficienty rozvoje jsou dány jednoduchými vzorci, jež lze snadno programovat v systémech počítačové algebry s podporou symbolických výpočtů.

V první části příspěvku uvedeme stručný úvod do problematiky Fourirerových řad se zaměřením na Fourierovy řady vzhledem ke trigonometrickému systému funkcí. Vzhledem k tomu, že pro podporu výuky matematické analýzy jsme vybrali systém počítačové algebry `wxmaxima`, který je distribuován pod svobodnou licencí s otevřeným kódem, budeme si ilustrovat jednoduchý způsob naprogramování rozvoje v tomto systému. O něco pokročilejší přístup si pak v závěrečné části přiblížíme na úloze reprezentovat

DOI: https://doi.org/10.11118/978-80-7509-898-6-0030

periodický rozvoj pro zadaný daný signál, aniž by byl znám jeho funkční předpis. Jde tedy o co nejbližší přiblížení úlohy reálné situaci v praxi.

Všechny uvedené zdrojové kódy lze aplikovat bez hlubší znalosti prostředí systému `wxmaxima`. Lze však doporučit bližší seznámení s tímto systémem například prostřednictvím publikací [3] a [4] nebo [5].

2 Fourierova řada

Pojem Fourierovy řady lze ve všeobecnosti zavést v libovolném abstraktním prostoru, ve kterém je definován skalární součin a je známa jeho ortogonální resp. ortonormální báze. My se od těchto abstraktních konstrukcí odchýlíme a budeme se věnovat specifickému, ale nejznámějšímu případu rozvoje vzhledem k ortonormálnímu trigonometrickému systému funkcí. Tento je tvořen posloupností funkcí ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \ldots \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots \tag{1}$$

Je-li dána funkce $f(x)$, jež je integrovatelná na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$, pak její rozvoj do Fourierovy řady vzhledem k ortonormálnímu systému 1 má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{2}$$

kde a_n,b_n jsou Fourierovy koeficienty, pro něž platí

$$\begin{array}{lcl} a_n & = & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ b_n & = & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Na tomto místě poznamenejme, že uvedené vztahy platí nejen na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$, ale na libovolném intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$délky 2π. Samozřejmě, použití si v takovém případě vyžaduje příslušnou změnu integračních mezí dle hranic intervalu.

Fourierovu řadu definovanou rovnicí 2 lze snadno transformovat na periodické funkce s libovolnou periodou $p = 2h$. Je-li totiž $f(x)$ periodická funkce s periodou $p = 2h$, která je integrovatelná na intervalu $\langle -h, h\rangle$, pak funkce $g(t) = f\left(\frac{h}{\pi}x\right)$ je periodická funkce s periodou 2π integrovatelná na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Tuto funkci lze dle vztahu 2 rozvinout do Fourierovy řady na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Zpětnou transformací $x = \frac{\pi}{h}t$ získáme Fourierovu řadu funkce $f(x)$ na intervalu $\langle -h, h\rangle$. Fourierova řada funkce $f(x)$ na intervalu $\langle -h, h\rangle$ má tudíž tvar:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{h} x + b_n \sin \frac{n\pi}{h} x), \tag{3}$$

kde Fourierovy koeficienty a_n a b_n jsou dány vztahy

$$\begin{array}{lcll} a_n & = & \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \cos \frac{n\pi}{h} x \, \mathrm{d}x, & n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ b_n & = & \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \sin \frac{n\pi}{h} x \, \mathrm{d}x, & n \in \mathbb{N} \end{array}$$

I zde upozorněme na skutečnost, že uvedený rozvoj platí na libovolném intervalu $\langle c, c+2h \rangle$ délky $2h$. Rovněž zde je nutno transformovat integrační meze dle hranic uvedeného intervalu.

Rozšířením Fourierových řad je rozvoj do řady sinů resp. do řady kosinů. Pro tyto účely je nutno definovat pojem sudého a lichého rozšíření funkce. Nechť $f(x)$ je funkce integrovatelná na $\langle 0, h \rangle$ [resp. $(0, h\rangle$]. Položíme-li pro $x \in \langle -h, 0 \rangle$ $f(x) = f(-x)$ [resp. $f(x) = -f(-x)$ a $f(0) = 0$], tak pravíme, že jsme sestrojili sudé (resp. liché) rozšíření funkce $f(x)$ na interval $\langle -h, h \rangle$.

Máme-li definováno sudé a liché rozšíření funkce, lze snadno charakterizovat rozvoj do řady sinů resp. kosinů. Fourierova řada sudého (lichého) rozšíření funkce $f(x)$ se nazývá řadou kosinů (řadou sinů) funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0, h \rangle$. V takovém případě lze vztahy pro Fourierovy koeficienty 3 zjednodušit do následující podoby.

Nechť $f(x)$ je funkcie integrovatelná na intervalu $\langle -h, h \rangle$. Je-li je tato funkce sudá, pak její Fourierova řada má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{h} x, \tag{4}$$

kde $a_n = \frac{2}{h} \int_0^h f(x) \cos \frac{n\pi}{h} x \, \mathrm{d}x$. Je-li tato funkce lichá, pak její Fourierova řada má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{h} x, \tag{5}$$

kde $b_n = \frac{2}{h} \int_0^h f(x) \sin \frac{n\pi}{h} x \, \mathrm{d}x$.

Podrobnější výklad problematiky Fourierových řad včetně podmínek jejich konvergence lze nalézt například v [2], [6] nebo ve slovenském jazyce v [1].

3 Ukázka řešení ve wxmaxima

Je-li dán předpis funkce, jíž chceme rozvinout, je poměrně jednoduché v prostředí systému wxmaxima naprogramovat rozvoj do Fourierovy řady. Programový „opis“ vztahů 2 resp. 3 zvládne prakticky každý, kdo je alespoň zběžně obeznámen se syntaxí tohoto prostředí. Zde si postup ilustrujeme na případu rozvoje funkce $f(x)^2$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$. Tvorbu příslušného skriptu pojmeme poněkud šířeji, aby ho bylo možno opakovaně použít i pro jiné funkce na libovolném intervalu. Při programování se budeme pro lepší orientaci přidržovat označení ze vztahů 2 resp. 3.

```
(declare(n,integer),assume(n>0),facts());
```

Dále je nutno definovat délku půlperiody `h`, začátek intervalu, ba němž určujeme rozvoj a uložíme ho v proměnné `start` a samotnou funkci `f(x)`, kterou hodláme do Fourierovy řady rozvíjet.

```
h:2$
start:-2$
f(x):=x^2$
```

Jsou-li nyní určeny všechny hodnoty nezbytné pro výpočet, lze definovat funkce k určení koeficientů Fourierova rozvoje dle vztahu 3. Vzhledem k tomu, že pole jsou v systému wxmaxima indexována od počáteční hodnoty 1, musíme koeficient a_0 definovat samostatně, jak vidíme z následujícího kódu:

```
a0:integrate(f(x),x,start,start+2*h)/h;
define(a(n),integrate(f(x)*cos(n*x*%pi/h),x,start,start+2*h)/h);
define(b(n),integrate(f(x)*sin(n*x*%pi/h),x,start,start+2*h)/h);
```

S využitím zavedených funkcí pro Fourierovy koeficienty lze definovat rozvoj do Foirierovy řady následujícím kódem:

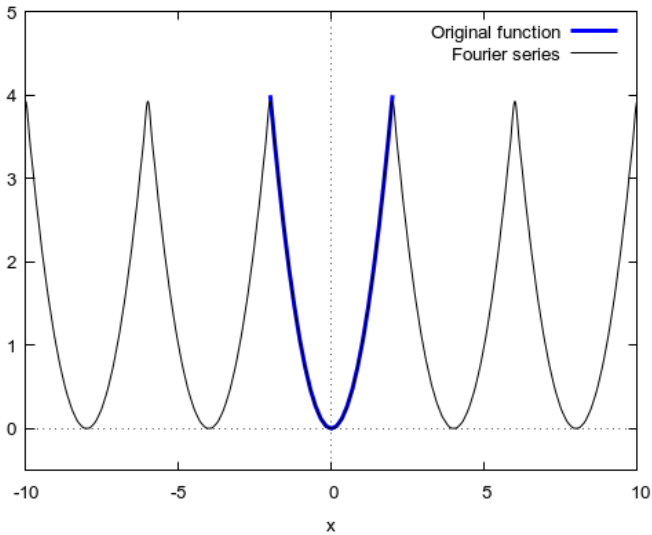
```
frada(nmax):=a0/2+sum(a(m)*cos(m*%pi*x/h)+b(m)*sin(m*%pi*x/h),m,1,nmax);
```

Jedinou proměnnou této funkce je `nmax`, která udává délku rozvoje. Jejím zadáním s příslušnou hodnotou obdržíme analytické vyjádření požadovaného rozvoje. Výsledek si lze pomocí funkce `plot2d()` resp. `wxplot2d()` prezentovat graficky. Příslušný kód má tuto podobu:

```
g(x):=if x>start and x<start+2*h then f(x);
wxplot2d([g(x),frada(20)],[x,-10,10],[y,-0.5,5],
[legend,"Original function","Fourier series"],[style,[lines,3,1],
[lines,1,5]]),wxpolt_size=[600,400];
```

```
plot2d([g(x),frada(20)],[x,-10,10],[y,-1,5],[style,[lines,3,1],
[lines,1,5]],[legend,"Original function","Fourier series"]);
```

Poznamenejme, že definice funkce `g(x)` slouží k zobrazení původního vzorku a je nepovinná, pokud nechceme porovnávat rozvoj a původní funkci (je pak ale rovněž nutno odstranit funkci `g(x)` se seznamu funkcí zobrazovaných pomocí `plot2d()` resp. `wxplot2d()`). Výsledný graf vidíme na obrázku 1.



Obr. 1: *Zobrazení Fourierovy řady funkce* $f(x) = x^2$ *na intervalu* $\langle -2, 2\rangle$.

4 Ukázka pokročilejší práce

V realitě se nevyskytují informační zdroje, jež by poskytovaly informaci o explicitním funkčním předpisu analyzovaného vzoru. naopak, musíme sami usilovat o jejich nalezení. Tuto situaci během laboratorních cvičení simulujeme zadáním grafického vzorku, který mají studenti za úlohu nejdříve vyjádřit jako funkci resp. jako křivku poskládanou z fragmentů několika funkcí, a následně ji rozvinout do Fourierovy řady, řady sinů a řady kosinů.

Zkušenosti z vyučování nám ukázaly, že největší potíže činí právě nalezení tohoto funkčního předpisu, byť pro jednoduchost předpokládáme, že vzorek je tvořen jen lineárními segmenty, tedy úseků poskládaných z přímek. Připomeňme tedy, jak nalézt předpis pro danou úsečku resp. rovnici přímky, z níž je úsečka vyťata. Situace je znázorněna na obrázku 2.

Při řešení tohoto problému vycházíme z nutnosti nalézt hodnotu koeficientů a a b z rovnice přímky $y = ax + b$. Souřadnice krajních bodů úsečky musí vyhovovat této rovnici a jejich dosazením tak získáme soustavu dvou rovnic pro neznámé koeficienty a a b. Tato soustava má (při dodržení označení dle obrázku 2) tvar:

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b$$

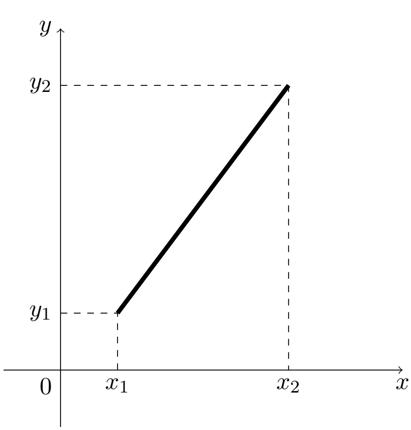
Jejím řešením obdržíme vztahy pro koeficienty a a b, jichž lze použít pro libovolný segment zadaného vzorku. Toto vyjádření má tvar:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$$

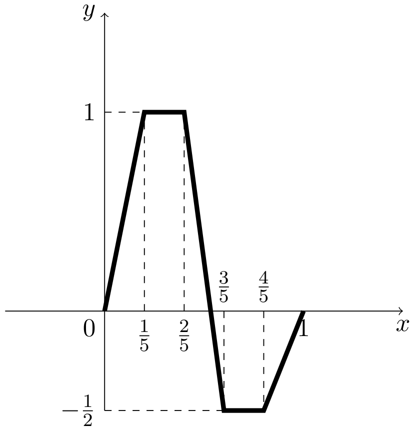
Ukázka možného zadání pro hledání Fourierovy řady je na obrázku 3. V tomto konkrétním případě sestává z pěti lineárních segmentů, jejichž koncové body zadáme do systému jako seznam o délce 6 prvků. Protože chceme úlohu řešit co nejobecněji, zjišťujeme délku seznamu v rámci kódu a pak cyklicky určujeme rovnice jednotlivých fragmentů. Výsledná vyjádření ukládáme jako seznam v proměnné `useky`. Zodpovídající kód má pak následující tvar:

```
kill(all);
seznam:[[0,0],[1/5,1],[2/5,1],[3/5,-1/2],[4/5,-1/2],[1,0]]$
delka:length(seznam)$
h:(seznam[delka][1]-seznam[1][1])/2$
for j:1 while j<delka do
(
a[j]:=(seznam[j+1][2]-seznam[j][2])/(seznam[j+1][1]-seznam[j][1]),
b[j]:=(seznam[j][2]*seznam[j+1][1]-seznam[j+1][2]*seznam[j][1])/
(seznam[j+1][1]-seznam[j][1]))$
useky:makelist(a[i]*x+b[i],i,1,delka-1);
```

Nyní již lze přistoupit k samotnému určení Fourierových koeficientů dle vztahů 3 resp. dle 5 pro řadu sinů a 4 pro řadu kosinů. Důležité je uvědomit si techniku výpočtu příslušných integrálů a integrační cestu rozdělit na jednotlivé intervaly, tak jak jsou určeny dělícími body zadané křivky. Opět je nutno nejprve samostatně spočíst koeficient a_0 a pak definovat koeficienty číslované od indexu 1. Příslušný zdrojový kód pak nabude tvaru:



Obr. 2: *Lineární segment – úsečka spojující body* $[x_1, y_1]$ *a* $[x_2, y_2]$.



Obr. 3: *Zadání vzorku z lineárních segmentů pro rozvoj do Fourierovy řady.*

```
a0:(1/h)*sum(integrate(useky[j],x,seznam[j][1],seznam[j+1][1]),
j,1,delka-1);
define(a(n),(1/h)*sum(integrate(useky[j]*cos(n*x*%pi/h),x,
seznam[j][1],seznam[j+1][1]),j,1,delka-1));
define(b(n),(1/h)*sum(integrate(useky[j]*sin(n*x*%pi/h),x,
seznam[j][1],seznam[j+1][1]),j,1,delka-1));
frada(nmax):=a0/2+sum(a(m)*cos(m*%pi*x/h)+b(m)*sin(m*%pi*x/h),m,1,nmax);
```

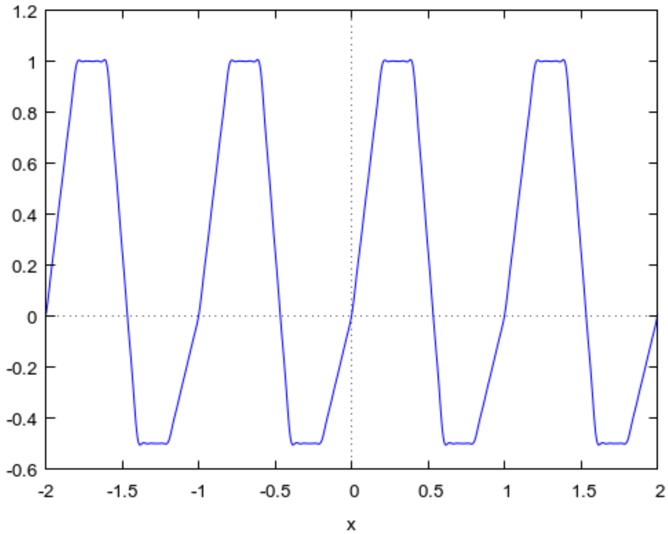
Výslednou Fourierovu řadu pak zobrazíme pomocí funkce `wxplo2dt()` resp. `plot2d()` s výsledkem prezentovaným na obrázku 4.

Dále definujeme funkce pro výpočet koeficientů pro příslušné řady sinů a kosinů. Pro odlišení od původních Fourierových koeficientů jsou označeny jako `bn` resp `ap`.

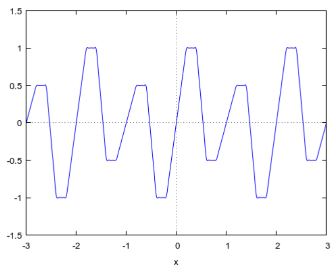
```
define(bn(n),(1/h)*sum(integrate(useky[j]*sin(n*x*%pi/(h*2)),x,
seznam[j][1],seznam[j+1][1]),j,1,delka-1));
ap0:(1/h)*sum(integrate(useky[j],x,seznam[j][1],
seznam[j+1][1]),j,1,delka-1);
define(ap(n),(1/h)*sum(integrate(useky[j]*cos(n*x*%pi/(h*2)),x,
seznam[j][1],seznam[j+1][1]),j,1,delka-1));
```

Po jejich výpočtu již efinujeme funkce pro řady sinů a kosinů ve tvaru:

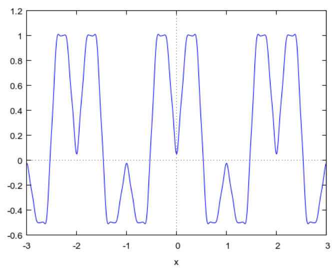
```
radasinu(nmax):=sum(bn(m)*sin(m*%pi*x/(h*2)),m,1,nmax);
```



Obr. 4: *Zobrazení Fourierovy řady vzorku na obrázku 3.*



Obr. 5: *Řada sinů pro vzorek dle obrázku 3.*



Obr. 6: *Řada sinů pro vzorek dle obrázku 3.*

```
radakosinu(nmax):=ap0/2+sum(ap(m)*cos(m*%pi*x/(h*2)),m,1,nmax);
```

Výsledky pak vidíme na obrázcích 5 a 6.

Literatura

1. Demetrian, M. *Fourierove rady a Fourierovv integrál* , Bratislava, Univezita Komenského, 2011.
2. Došlá, Z., Novák, V. *Nekonečné řady*, Brno, Masarykova Univezita, 2007.
3. Hannan, Z. *WxMaxima for Calculus I*, Solano, Comunty College, 2015.

4. Hannan, Z. *WxMaxima for Calculus I*, Solano, Comunty College, 2015.

5. Kanagasabapathy, M. *Introduction to wxMaxima for Scientific Computations*, New Delhi, BPB Publications, 2018.

6. Kufner, A., Kadlec, J. *Fourierovy řady*, Brno, Academia, 1969.

Autor

RNDr. Aleš Kozubík, PhD., Katedra matematických metód a operačnej analýzy, Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita v Žiline, Vysokoškolákov 8215/1, 010 26 Žilina, Slovenská republika, e-mail: alesko@frcatel.fri.uniza.sk